Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – mathématiques discrètes

Mercredi 18 mai 2016 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[60 points]**.

2216 – 7221

© International Baccalaureate Organization 2016

https://xtremepape.rs/

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 9]

(a) Utilisez l'algorithme euclidien pour montrer que 1463 et 389 sont relativement premiers. [4]

(b) Trouvez des entiers positifs a et b tels que $1463a - 389b = 1$. [5]

2. [Note maximale : 12]

Les poids des arêtes du graphe complet G sont indiqués dans le tableau suivant.

	A	B	C	D	E	F
A	–	14	10	8	12	9
B	14	–	9	12	10	13
C	10	9	–	7	8	13
D	8	12	7	–	9	11
E	12	10	8	9	–	11
F	9	13	13	11	11	–

(a) En partant de A, utilisez l'algorithme des plus proches voisins pour trouver une borne supérieure au problème du voyageur de commerce pour G. [5]

(b) En enlevant d'abord A, utilisez l'algorithme du sommet effacé pour trouver une borne inférieure au problème du voyageur de commerce pour G. [7]

https://xtremepape.rs/

3. [Note maximale : 10]

Tout au long de cette question, $(abc\ldots)_n$ désigne le nombre $abc\ldots$ écrit en base n. Par exemple $(359)_n = 3n^2 + 5n + 9$.

(a) (i) Étant donné que $(43)_n \times (56)_n = (3112)_n$, montrez que $3n^3 - 19n^2 - 38n - 16 = 0$.

(ii) À partir de là, déterminez la valeur de n. [3]

(b) Déterminez l'ensemble des valeurs de n qui satisfont $(13)_n \times (21)_n = (273)_n$. [3]

(c) Montrez qu'il n'y a aucune valeur possible de n qui satisfait $(32)_n \times (61)_n = (1839)_n$. [4]

4. [Note maximale : 17]

(a) Résolvez la relation de récurrence $v_n + 4v_{n-1} + 4v_{n-2} = 0$, où $v_1 = 0$, $v_2 = 1$. [6]

(b) Utilisez la récurrence forte pour prouver que la solution de la relation de récurrence $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, où $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ est donnée par $u_n = 2^{n-2}(n-1)$. [8]

(c) Trouvez une expression simplifiée pour $u_n + v_n$ étant donné que,

(i) n est pair.

(ii) n est impair. [3]

5. [Note maximale : 12]

Le graphe simple connexe G possède e arêtes et v sommets, où $v \geq 3$.

(a) Montrez que le nombre d'arêtes de G', le complément de G, est $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v - e$. [2]

Étant donné que G et G' sont planaires et connexes,

(b) montrez que la somme du nombre de faces de G et du nombre de faces de G' est indépendante de e ; [3]

(c) montrez que $v^2 - 13v + 24 \leq 0$ et à partir de là, déterminez la valeur maximale possible de v. [7]

https://xtremepape.rs/